集合与映射（续 1）

例 5：设 a_n 为下述自然数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字都只能取 1、3 或 4.

求证对每个自然数 n，a_{2n} 都是完全平方数.

【证明】记各位数字之和为 n 且每位数字都是 1 或 2 的所有自然数的集合为 S_n，并记 $|S_n| = f_n$，

则 $f_1 = 1, f_2 = 2$，且当 $n \geq 3$ 时有 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$，这意味着 $\{f_n\}$ 恰为菲波那契数列.

作对应 $S_n \ni M_1 \to M'$ 如下：先将 M 的数字中自左至右的第一个 2 与它后邻的数字相加，其和作为一位数字；然后再把余下数字中第一个 2 与它后邻的数字相加，所得的和作为下一位数字；依此类推，直到无数再相加为止.所得的新自然数 M′除最后一位数可能为 2 之外，其余各位数字均为 1、3 或 4.若记所有 M′的集合为 T_n，则容易看出，上述对应是由 S_n 到 T_n 的双射，从而有 $|T_n| = |S_n| = f_n$，且显然有 $f_n = a_n + a_{n-2}, n = 3,4,\cdots$ ①

对任一数字和为 2n,各位数字均为 1 或 2 的自然数 M 必存在正整数 k 使得下列两条之一成立：

（1）M 的前 k 位数字之和为 n；

（2）M 的前 k 位数字之和为 $n-1$，第 $k+1$ 位数字为 2.

则立即可得 $f_{2n} = f_n^{\,2} + f_{n-1}^{\,2}, n = 2,3,\cdots$ ②

由①和②得到

$$a_{2n} + a_{2n-2} = f_{2n} = f_n^2 + f_{n-1}^{\,2},$$

$$a_{2n} - f^2{}_n = -(a_{2n-2} - f^2{}_{n-1}),③$$

因为 $a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4, f_2 = 2$，所以 $a_4 - f_2^2 = 0$. 于是由③递推即得

$$a_{2n} = f_n^{\,2}, n = 1,2,3,\cdots,$$ 即 a_{2n} 为完全平方数.

应用映射还可以证明某些与计数相关的不等式和等式.这时可以通过分别计数来证明等或不等，也可以不计数而直接通过适当的映射来解决问题.

例 6：将正整数 n 写成若干个 1 和若干个 2 之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法种数记为 $\alpha(n)$.将 n 写成若干个大于 1 的正整数之和，和项顺序不同认为是不同的写法，所有写法的种数记为 $\beta(n)$.求证对每个 n，都有 $\alpha(n) = \beta(n+2)$.

【证法 1】将每项都是 1 或 2，各项之和为 n 的所有数列的集合记为 A_n，每项都是大于 1 的正整数，各项之和为 n 的所有数列的集合记为 B_n，则问题就是证明 $|A_n|=|B_{n+2}|$,

显然，只需在两集之间建立一个双射就行了.

设 $(a_1,a_2,\cdots,a_m)=a\in A_n$, 其中 $a_{i1}=a_{i2}=\cdots=a_{ik}=2, 1\le i_1\le i_2<\cdots<i_k\le m$, 其余的 a_i 均为 1 且 $a_1+a_2+\cdots+a_m=n.$ 令

$$
\begin{aligned}
&b_1=a_1+a_2+\cdots+a_{i_1}\\
&b_2=a_{i_1+1}+a_{i_2+2}+\cdots+a_{i2}\\
&\vdots\\
&b_k=a_{i_{k-1}+1}+a_{i_{k-1}+2}+\cdots+a_{ik}\\
&b_{k+1}=a_{i_k+1}+a_{i_k+2}+\cdots+a_{m+2,}
\end{aligned}
$$

$b=(b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1})$, ①

则 $b\in B_{n+2}$.

定义 $A_n\ni a\to b\in B_{n+2}$ ②

则 f 为双射.事实上，若 $a,a'\in A_n$, 且 $a\ne a'$，则或者数列 a 和 a′中的 2 的个数不同，或者 2 的个数相同但位置不全相同.无论哪种情形,由①和②知 $b=f(a)$ 与 $b'=f(a')$ 不同，即 f 为单射，另一方面，对任何 $b\in B_{n+2}$ 利用①式又可确定 $a\in A_n$, 使得 $f(a)=b$, 即 f 为满射，从而 f 为由 A_n 到 B_{n+2} 的双射.

【证法 2】使用证一中的记号 A_n和B_n. 对于任意的 $(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},a_m)=a\in A_{n+2}$, 令 $a'=(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})$. 显然，当 $a_m=1$ 时，$a'\in A_{n+1}$; 当 $a_m=2$ 时，$a'\in A_1$, 容易看出，映射 $A_{n+2}\ni af\to a'\in A_{n+1}\cup A_n$ 是双射，故有 $\alpha(n+2)=\alpha(n+1)+\alpha(n)$. 注意到 $\alpha(1)=1,\alpha(2)=2$，便知 $\alpha(n)=f_n$, 这里 f_n 为菲波那契数列.

对于任意的 $(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b_k)=b\in B_{n+2}$ 令 $b'=\begin{cases}(b_1,b_2,\cdots,b_{k-1}) & 当 b_k=2\\ (b_1,b_2,\cdots,b_{k-1},b_k-1) & 当 b_k>2\end{cases}$

则当$b_k=2$时，$b'=2$时，$b'\in B_n$；

当$b_k>2$时,$b'\in B_{n+1}$,容易验证映射$B_{n+2}\ni b\to b'\in B_{n+1}\cup B_n$为双射，

故有$\beta(n+2)=\beta(n+1)+\beta(n)$, 所以$\beta(n+2)=f_n=\alpha(n)$

【证法 3】显然有$\alpha(1)=1\beta(3),\alpha(2)=2=\beta(4)$,即命题于 n=1,2 时成立.

设命题于$n\le k+1(k\ge 1)$时成立，须证当$n=k+2$时，命题成立。既然命题于$n=k,k+1$时都成立，故存在A_n与B_{k+2}，A_{k+1}与B_{k+3}之间的双射f_k与f_{f+1}。令

$$f(a)=\begin{cases}f_k(a) & \text{当}a\in A_k\\ f_{k+1}(a), & \text{当}b_k>2\end{cases}$$

则f为由$A_k\cup A_{k+1}$到$B_{n+2}\cup B_{n+3}$的双射

对于任意的$(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1},a_m)=a\in A_{k+2}$和任意$(b_1,b_2,\cdots,b_l)=b'\in B_{k+2}\cup B_{k+3}$,令

$$a'=(a_1,a_2,\cdots,a_{m-1})\in\begin{cases}A_k,\text{当}a_m=2,\\ A_{k+1},\text{当}a_m=1,\end{cases}\quad b=\begin{cases}(b_1,b_2,\cdots b_l,2)\in B_{k+4},\text{当}b'\in B_{k+2}\\ b_1,b_2,\cdots b_l+1)\in B_{k+4},\text{当}b'\in B_{k+3}.\end{cases}$$

则映射：$g:A_{k+2}\ni a\to a'\in A_k\cup A_{k+1}\qquad h:B_{k+2}\cup B_{k+3}\ni b'\to b\in B_{k+4}$

都是双射，从而复合映射$h\circ f\circ g:A_{k+2}\ni a\to b\in B_{k+4}$为双射，故有$\alpha(k+2)=\beta(k+4)$，于是由数学归纳法知命题对所有自然数 n 都成立.

映射法还可以与其他方法结合起来使用，而且大多数竞赛题是这种类型.例如映射法可与抽屉原理、构造法、反证法等各种方法结合起来.