集 合 与 映 射

知识、方法、技能

这一讲主要介绍有限集的阶，有限集上的映射及其性质，这些在与计数有关的数学竞赛问题中应用极广，是参赛者必不可少的知识

Ⅰ.有限集元素的数目

1．有限集的阶：有限集 A 的元素数目叫做这个集合的阶，记作|A|[或 n(A)].

2．集族的阶：若 M 为由一些给定的集合构成的集合，则称集合 M 为集族.

设 A 为有限集，由 A 的若干个子集构成的集合称为集合 A 的一个子集族，求满足一定条件的集族的阶是一类常见的问题.

显然，若|A|=n，则由 A 的所有子集构成的子集族的阶为 2^n.

Ⅱ.映射，映射法

定义 1：设 X 和 Y 是两个集合（二者可相同）.如果对于每个 $x\in X$,都有惟一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称此对应关系为 X 到 Y 的映射. 记为 $X\to Y$ 或 $x\in X\to y\in Y$. 这时, $y=f(x)\in Y$ 称为 $x\in X$ 的象,而 x 称为 y 的原象,特别当 X 和 Y 都是数集时,映射 f 称为函数.

定义 2：设 f 为从 X 到 Y 的一个映射.

（1）如果对于任何 x_1、$x_2\in X, x_1\neq x_2$, 都有 $f(x_1)\neq f(x_2)$, 则称为 f 单射；

（2）如果对于任何 $y\in Y$，都有 $x\in X$，使得 $f(x)=y$，则称 f 为满射；

（3）如果映射 f 既为单射又为满射，则称 f 为双射；

（4）如果 f 为满射且对任何 $y\in Y$，恰有 X 中的 m 个元素 x_1、x_2、$\cdots x_m$，使得 $f(x_i)=y, i=1,2,\cdots,m$, 则称 f 为（倍数为 m 的）倍数映射

定理 1　设 X 和 Y 都是有限集，f 为从 X 到 Y 的一个映射,

（1）如果 f 为单射，则|X|≤|Y|

（2）如果 f 为满射，则|X|≥|Y|

（3）如果 f 为双射，则|X|=|Y|

（4）如果 f 为倍数为 m 的倍数映射，则|X|=m|Y|.

这个定理的结果是显然的.

定理 2　设有限集 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, f 是 A 到 A 上的映射，$f_1(x)=f(x)$, $f_{r+1}(x)=f[f_r(x)](x\in A, r\in N^*)$, 则 f 是一一映射（即双射）的充要条件是：对任意

$a_i \in A$,存在$m_i \in N^*, 1 \le m_i \le n$使得$f_{m_i}(a_i) = a_i$,而$f_s(a_i) \ne a_i (s \in N^*, 1 \le s \le m_i - 1)$.

证明：必要性.若 f 是双射，则 $f_1 = (a_i) = a_i$ （此时 m_i=1）,或者 $f_1(a_i) = a_{i1} \ne a_i$.在后一种情形下，不可能有 $f_2(a_i) = f_1(a_{i_1}) = a_{i_1}$.否则，$a_{i1}$ 在 A 中有两个原象 a_i 和 a_{i1}，与 f 是双射不合，而只可能有 $f_2(a_i) = a_i$ （此时 $m_i = 2$），或者 $f_2(a_i) = a_{i_2} \ne a_i, a_{i_1}$,如果 $f_2(a_i) = a_{i2}$，则依同样的道理，不可能有 $f_3(a_i) = f(a_{i_2}) = a_{i_1}, a_{i_2}$，而只可能有 $f_3(a_i) = a_i$ （此时 $m_i = 3$）或者 $f_3(a_i) = a_{i_3} \ne a_i, a_{i_1}, a_{i_2}$.如此等等.

因为 A 是有限集，所以经过有限次（设经过 m 次）后，有 $f_{m_i}(a_i) = a_i$, 而 $f_s(ai) \ne a_i$ $(s \in N^*, 1 \le s \le m_i - 1)$. 这表明当 f 是双射时，对任一 $a_i \in A$ 都存在着映射圈:$a_i \to a_{i1} \to a_{i2} \to \cdots a_{im_i - 1} \to a_i$ 在这个映射圈中，诸元素互异，且$1 \le m_i \le n$（$m_i = 1$，只有 1 个元素 a_i）

充分性：如果对任意 $a_i \in A$, 存在 $m_i \in N^*, 1 \le m_i \le n$, 使 $f_{mi}(a_i) = a_i$, 而 $f_s(a_i) \ne a_i$ $(s \in N^*, 1 \le s \le m_{i-1})$，这说明从 A 中任一元素 a_i 出发，都可以得到一个包含 m_i 个互异元素的映射圈，显然 f 是双射.

定理 3　在命题 1 的条件下，若对$a_i \in A$,存在$m_i \in N^*$,使$f_{mi}(a_i) = a_i$，则对任意$t \in N^*$,有 $f_{tm_i}(a_i) = a_i$.这是明显的事实，证明从略.

赛题精讲

例 1：集合 $A = \{x \mid 1 \le x \le 2000, x = 4k+1, k \in Z\}$, $B = \{y \mid 1 \le y \le 3000, y = 3k-1, k \in Z\}$

求：$|A \cap B|$

【解】形如 $4k$+1 的数的数可分三类：$12l+1, 12l+5, 12l+9 (l \in Z)$，其中只有形如 $12l$+5 的数是形如 $3k$-1 的数.

令$1 \le 12l + 5 \le 2000 (l \in Z)$, 得$0 \le l \le 166$,所以$A \cap B = \{5, 17, \cdots, 1997\} \Rightarrow |A \cap B| = 167$

例 2：有 1987 个集合，每个集合有 45 个元素，任意两个集合的并集有 89 个元素，问此 1987 个集合的并集有多少个元素.

【解】显然，可以由题设找到这样的 1987 个集合，它们都含有一个公共元素 a，而且每两个集合不含 a 以外的公共元素.但是，是否仅这一种可能性呢？

由任意两个集合的并集有 89 个元素可知，1987 个集合中的任意两个集合有且仅有一个公共元素，则容易证明这 1987 个集合中必有一个集合中的元素 a 出现在 A 以外的 45 个集合中，设为 A_1，A_2，⋯，A_{45}，其余的设为 A_{46}，A_{47}，⋯，A_{1996}.

设 B 为 A_{46}，⋯，A_{1996} 中的任一个集合，且 $a \notin B$，由题设 B 和 A，A_1，A_2，⋯，A_{45} 都有一个公共元素，且此 46 个元素各不相同，故 B 中有 46 个元素，与题设矛盾，所以这 1987 个集合中均含有 a.

故所求结果为 1987×44+1=87429.即这 1987 个集合的并集有 87429 个元素.

例 3：集合 $A=\{0,1,2\cdots,9\}, B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 A 的非空子集族，并且当 $i \neq j$ 时 $|B_i \cap B_j| \leq 2,$ 求 n 的最大值.

【解】首先考虑至多含三个元素的 A 的非空子集族，它们共有 $C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3=175$ 个，这说明 $n_{\max} \geq 175.$

下证 $n_{\max} \leq 175.$ 事实上，设 D 为满足题设的子集族，若 $B \in D,$ 且 $|B| \geq 4,$ 设 $b \in B,$ 则 B 与 B-{b}不能同时含于 D，以 B-{b}代 B，则 D 中元素数目不变.仿此对 D 中所有元素数目多于 4 的集合 B 作相应替代后，集族 D 中的每个集合都是元素数目不多于 3 的非空集合，故 $n_{\max} \leq 175.$ 所以，$n_{\max}=175.$

在许多问题中，计数对象的特征不明显或混乱复杂难以直接计数，这时可以通过适当的映射将问题划归为容易计数的对象，然后再解决，从而取得化难为易的效果.

例 4：设 S={1,2,3,⋯,n}，A 为至少含有两项的公差为正的等差数列，其项都在 S 中且当将 S 的其他元素置于 A 中之后，均不能构成与 A 有相同公差的等差数列.求这种 A 的个数（只有两项的数列也视为等差数列）

【解】当 $n=2k$ 为偶数时，满足题中要求的每个数列 A 中必有连续两项，使其前一项在集{1,2,⋯,k}和{k+1,k+2,⋯,2k}中各任取一数，并以二数之差作为公差可以作出一个满足要求的数列 A.容易看出，这个对应是双射.故知 A 的个数为 $k^2=n^2/4.$

当 n=2k+1 为奇数时，情况完全类似.惟一的不同在于这时第二个集合 $\{k+1, k+2, \cdots n\}$ 有 k+1 个元素.故 A 的个数为 $k(k+1)=(n^2-1)/4.$