

高中数学联赛培训题（一）

一、选择题（每小题6分）：

1. 设 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ，则满足等式 $\sin \alpha - \sqrt{3} \cos \alpha = \log_2(x^2 - x + 2)$ 的实数 x 属于区间（ ）
A. $(-1, 2)$ B. $(-1, 0)$ 或 $(1, 2)$ C. $[0, 1]$ D. $[-1, 0)$ 或 $(1, 2]$
2. 直角三角形 $\triangle ABC$ 中， C 是直角， D, E 是三分斜边 AB 上的两点，已知 $CD = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ ， $CE = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ ，则斜边 AB 的长为（ ）
A. $\sqrt{3}$ B. $8\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$
3. 方程 $||x| + y - 1| + |x| = 1$ 所表示的图形是（ ）
A. 不封闭的折线 B. 四边形 C. 非等边三角形 D. 以上都不对
4. 设实数集 R 上定义的函数 $f(x)$ ，对任何 $x \in R$ 都有 $f(x) + f(-x) = 2000$ ，则这个函数的图像的对称中心是（ ）
A. 点 $(0, 0)$ B. 点 $(0, 1000)$ C. 点 $(0, 2000)$ D. 不存在对称中心
5. 一线段的分割法是：使小的一段比大的一段和大的一段比整个线段一样，设 x 是小的一段对大的一段的比值，那么 $x^{x^2+x^2-1} + x^{-2}$ 的值为（ ）
A. 3 B. $\sqrt{3}$ C. 5 D. $2x$
6. 方程 $\tan(x^{\sin x}) = \cot(x^{\cos x})$ 在闭区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 内的解的个数共有（ ）
A. 0个 B. 1个 C. 2个 D. 不止2个，但具有有限个多

二、填空题（每小题9分）：

7. 不等式 $x(x-1) \leq y(1-y)$ 的解集中 x, y 能使 $x^2 + y^2 \leq K$ 成立时的 K 的最小值为_____。
8. 已知 $x + y = 4$ ， $xy = -4$ ，那么 $(x^3 + y^3) : (x^3 - y^3) =$ _____。
9. 设点 $P(x, y)$ 到 x, y 轴的最短距离为 z ，点 P 在 $A(3, 1)$ ， $B(4, 5)$ ， $C(5, 2)$ 为顶点的三角形内部及周界上移动，使 z 最大值的点 P 的坐标为_____。
10. 满足方程 $2\log_2(3x-2y) = \log_{\sqrt{2}}(y + \sqrt{5-2x}) + 2$ 的整数解为_____。

11. 若不等式 $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+2n} > \frac{m}{2100}$ 对一切大于1的自然数 n 都成立, 则整数 m 的最大值为_____。

12. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 a, b, c 成等比数列, 则 $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{C}{2}$ 的取值范围是_____。

二、解答题 (每小题 20 分):

13. 若 $x, y \in [0, \pi]$, 对于任何实数 t , 表达式 $(-2\cos t - \frac{1}{2}\cos x \cos y)\cos x \cos y - 1 - \cos x + \cos y - \cos 2t$ 恒为负, 试求 x, y 所满足的关系式。

14. 已知: 函数 $f(x) = x + \sqrt{x^2 - a^2}$ ($a > 0$)。数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = f^{-1}(a_n)$, $a_1 = 3a$,

($n \in N$), 设 $b_n = \frac{a_n - a}{a_n + a}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 试比较 S_n 与 $\frac{7}{8}$ 的大小, 并证明你

的结论。

15. 已知 AB 、 BC 、 CA 是抛物线 $y^2 = 2px$ ($p > 0$) 的三条任意切线, 它们交成一个 $\triangle ABC$, 求证 $\triangle ABC$ 的垂心在某条固定的直线上。