全国高中数学联赛模拟试题（九）

（命题人：葛军）

第一试

一、选择题：（每小题 6 分，共 36 分）

1、已知 n、s 是整数．若不论 n 是什么整数，方程 $x^2-8nx+7^s=0$ 没有整数解，则所有这样的数 s 的集合是

（A）奇数集　　（B）所有形如 $6k+1$ 的数集

（C）偶数集　　（D）所有形如 $4k+3$ 的数集

2、某个货场有 1997 辆车排队等待装货，要求第一辆车必须装 9 箱货物，每相邻的 4 辆车装货总数为 34 箱．为满足上述要求，至少应该有货物的箱数是

（A）16966　　（B）16975　　（C）16984　　（D）17009

3、非常数数列$\{a_i\}$满足 $a_{i+1}^2-a_ia_{i+1}+a_i^2=0$，且 $a_{i+1}\neq a_{i-1}$，$i=0,1,2,\cdots,n$．对于给定的自然数 n，$a_1=a_{n+1}=1$，则 $\sum\limits_{i=0}^{n-1}a_i$ 等于

（A）2　　（B）-1　　（C）1　　（D）0

4、已知α、β是方程 $ax^2+bx+c=0$（a、b、c 为实数）的两根，且α是虚数，$\dfrac{\alpha^2}{\beta}$是实数，则 $\sum\limits_{k=1}^{5985}\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^k$ 的值是

（A）1　　（B）2　　（C）0　　（D）$\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

5、已知 $a+b+c=abc$，$A=\dfrac{\left(1-b^2\right)\left(1-c^2\right)}{bc}+\dfrac{\left(1-a^2\right)\left(1-c^2\right)}{ac}+\dfrac{\left(1-a^2\right)\left(1-b^2\right)}{ab}$，则 A 的值是

（A）3　　（B）-3　　（C）4　　（D）-4

6、对 $x_i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$i=1,2,\cdots,n$，有 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\dfrac{n(n+1)}{2}$，$x_1x_2\cdots x_n=n!$，使 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，一定是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列的最大数 n 是

（A）4　　（B）6　　（C）8　　（D）9

二、填空题：（每小题 9 分，共 54 分）

1、设点 P 是凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内一点，点 P 到直线 A_1A_2 的距离为 h_1，到直线 A_2A_3 的距离为 h_2，…，到直线 $A_{n-1}A_n$ 的距离为 h_{n-1}，到直线 A_nA_1 的距离为 h_n．若存在点 P 使 $\dfrac{a_1}{h_1}+\dfrac{a_2}{h_2}+\cdots+\dfrac{a_n}{h_n}$（$a_i=A_iA_{i+1}$，$i=1,2,\cdots,n-1$，$a_n=A_nA_1$）取得最小值，则此凸多边形一定符合条件__________．

2、已知 a 为自然数，存在一个以 a 为首项系数的二次整数系数的多项式，它有两个小于 1 的不同正根．那么，a 的最小值是__________．

3、已知 $F(a,\theta)=\dfrac{a^2+2a\sin\theta+2}{a^2+2a\cos\theta+2}$，$a$、$\theta\in\mathbf{R}$，$a\neq0$．那么，对于任意的 a、θ，$F(a,\theta)$的最

大值和最小值分别是__________.

4、已知 $t>0$，关于 x 的方程为 $|x|+\sqrt{t-x^2}=\sqrt{2}$，则这个方程有相异实根的个数情况是__________.

5、已知集合$\{1,2,3,\cdots,3n-1,3n\}$，可以分为 n 个互不相交的三元组$\{x,y,z\}$，其中 $x+y=3z$，则满足上述要求的两个最小的正整数 n 是__________.

6、任给一个自然数 k，一定存在整数 n，使得 x^n+x+1 被 x^k+x+1 整除，则这样的有序实数对$(n，k)$是（对于给定的 k）__________.

三、（20 分）

过正方体的某条对角线的截面面积为 S，试求 $\dfrac{S_{最大}}{S_{最小}}$之值.

四、（20 分）

数列$\{a_n\}$定义如下：$a_1=3$，$a_n=3^{a_{n-1}}$（$n\geqslant2$）. 试求 a_n（$n\geqslant2$）的末位数.

五、（20 分）

已知 a、b、$c\in\mathbf{R}^+$，且 $a+b+c=1$.

证明：$\dfrac{13}{27}\leqslant a^2+b^2+c^2+4abc<1$.

第二试

一、（50 分）

已知△ABC 中，内心为 I，外接圆为⊙O，点 B 关于⊙O 的对径点为 K，在 AB 的延长线上取点 N，CB 的延长线上取 M，使得 $MC=NA=s$，s 为△ABC 的半周长．证明：$IK\perp MN$．

二、（50 分）

M 是平面上所有点(x,y)的集合，其中 x、y 均是整数，且 $1\leqslant x\leqslant 12$，$1\leqslant y\leqslant 13$．证明：不少于 49 个点的 M 的每一个子集，必包含一个矩形的 4 个顶点，且此矩形的边平行于坐标轴．

三、（50 分）

实系数多项式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 满足 $b<0$，$ab=9c$．试判别此多项式是否有三个不同的实根，说明理由．

参考答案

第一试

一、选择题：

1、C；2、B；3、D；4、C；5、C；6、C

二、填空题：

1、该凸多边形存在内切圆；　　2、5；　　3、$2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$；

4、9；　　5、5，8；　　6、(k，k) 或 (3m+2，2)（$m\in\mathbf{N}_{+}$）.

三、$\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

四、7.

五、证略.

第二试

一、证略；

二、证略.

三、有.